O ENSINO DOS NÚMEROS REAIS: DIFICULDADES EPISTEMOLÓGICA E HISTÓRICA DO CONCEITO DE NÚMERO REAL

Leonardo Antônio Souto[1]

Resumo

Este artigo tem como objetivo realizar uma análise histórica e epistemológica do conceito de números reais e o desenvolvimento desse conceito ao longo da história até chegar nas definições atuais presentes em objetos matemáticos que tiveram alguma influência na sua formação. O estudo será realizado sob a perspectiva da teoria histórico-cultural, cuja origem epistemológica está no materialismo histórico dialético, o que permite concluir que o desenvolvimento dos números foi marcado pelas diferentes formas de se trabalhar com as representações numéricas, sendo o conceito atual de número real o resultado de uma excursão de 25 séculos que contou com contribuições de diferentes civilizações em diversos momentos históricos.

Palavras chaves: História da Matemática; ensino de números reais.

THE TEACHING OF THE REAL NUMBERS. EPISTEMOLOGICAL AND HISTORICAL DIFFICULTIES OF THE CONCEPT OF REAL NUMBER

Abstract

This article aims to perform a historical and epistemological analysis of the concept of real numbers and the development of this concept throughout history until arriving at the current definitions present in mathematical objects that had some influence on their formation. The study will be carried out under the perspective of historical-cultural theory, whose epistemological origin is in dialectical materialism, which allows to conclude that the development of numbers was marked by the different ways of working with numerical representations, where the actual concept of real number is the result of an excursion of 25 centuries that counted on contributions of different civilizations in diverse historical moments.

Keywords: History of Mathematics; teaching real numbers.

Introdução

São notórias, ao observarmos a realidade das escolas brasileiras, as dificuldades por parte dos alunos em entender os conceitos matemáticos e, por parte dos professores em levar o aluno a pensar, visto que os mesmos muitas

[1] Doutorando pela PUC-Go; Mestre em Matemática – UFG; Professor da UEG, campus Cet e da PUC Goiás. leonardosouto12@yahoo.com.br.

vezes se sentem desmotivados a estudar. Diante de tal cenário, percebemos a necessidade de novas metodologias de ensino, a fim de promover a aprendizagem. Na Matemática a maioria dos alunos concluem o ensino fundamental sem saber realizar cálculos aritméticos básicos, como operações de frações e cálculo de radicais, bem como interpretar e resolver problemas elementares envolvendo conceitos numéricos, algébricos e geométricos.

A pedagogia tradicional não é capaz de expressar a especificidade do pensar humano e, portanto, não caracteriza o processo que generaliza e forma conceitos e em decorrência disso, o ensino dos conceitos se apresenta desvinculado de suas procedências. Os professores muitas vezes dão respostas a perguntas que os alunos não formularam e esperam que eles entendam. Mostram uma matemática aparentemente pronta e acabada, sem estimular o pensamento que levou a formular os conceitos.

Portanto, como os conhecimentos matemáticos foram formados historicamente, fica evidente que o conhecimento que temos hoje é consequência do desenvolvimento lógico-histórico. Portanto, a história e a epistemologia dos conceitos devem ser trabalhadas no ensino de maneira a buscar no processo histórico o movimento do pensamento no contexto em que os conceitos foram desenvolvidos. Assim, ela serve como um rico recurso para elaboração de propostas didáticas, já que essa busca conduz a apropriação do conceito pelo indivíduo.

Diante dessa problemática surgiu, então a motivação para pesquisar sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos de compreender o conceito de número real. O enfoque evolucionista dos números reais leva em consideração os resultados do passado e como eles são trazidos para entender o presente.

O presente artigo será dividido em duas partes, sendo que a primeira parte será realizado um breve estudo histórico e epistemológico dos números reais, mostrando as necessidades e as dificuldades de uma época passada que levaram a sua criação, desde o surgimento dos números naturais pelas sociedades da Antiguidade até o conceito do número real no final do século XIX. Na segunda parte será discutida a dificuldades apresentadas pelos alunos de compreender o conceito de números reais baseado no problema de natureza epistemológica e uma proposta de ensino utilizando a teoria desenvolvimental de Davydov.

História dos números reais: números naturais

Número não é uma ideia fácil de conceituar, entretanto, como afirma Boyer:

> Boa parte do que hoje se chama matemática deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Definições antiquadas da matemática como uma “ciência do número e grandeza” já não são válidas; mas sugerem as origens dos diversos ramos da Matemática. (Boyer, 2012, p.1)

Daí se pode concluir que o conceito de número é essencial para toda a matemática.

As possibilidades numéricas dos povos pré-históricos se resumiam em uma apreciação global do espaço ocupado pelos seres e pelos objetos próximos. Esses povos conseguiam no máximo estabelecer uma diferença entre unidade, o par e a pluralidade (Ifrah, 2005, p 17). Ainda hoje se percebe em povos que vivem como na pré-história a presença apenas dos conceitos de um, dois e muitos.

Com expõe Ifrah, um e dois são os primeiros conceitos numéricos inteligíveis pelo ser humano. O um é o homem associado a criação, único ser vivo em pé, é ele no seio de um grupo social ou em solidão (2005, p.17). O dois, corresponde a dualidade do feminino e do masculino ou ainda a ideia de complementaridade, oposição.

O primeiro procedimento aritmético foi a correspondência um a um, que consistia em comparar duas coleções de seres ou de objetos, fazer uma equiparação entre elementos de um grupo com outro. A partir deste princípio o homem pré-histórico pode praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato.

O corpo humano, é considerado como origem da aritmética. As técnicas corporais do número levaram os ancestrais a tomar consciência da noção de ordem. Quando se considera um certo número de partes do corpo humano numa ordem previamente estabelecida e sempre a mesma, acaba se tornando numérica. Dentre as técnicas corporais do número, o recurso dos dedos da mão desempenhou realmente um papel determinante. A humanidade inteira aprendeu a contar abstratamente até 5 nos dedos de uma mão, depois até dez por simetria. A mão do homem se representa como a “máquina de contar “mais simples e mais natural que existe. Com a mão, é possível a passagem do número cardinal para o ordinal.

Quando o homem tinha acesso a abstração dos números e aprendeu a distinção sutil entre cardinal e o número ordinal ele voltou a seus antigos “instrumentos”, mas agora considerando o aspecto de contagem. Foi então que ele se deparou com um problema, como representar números grandes. A partir disso surge a ideia de agrupamento e com isso as bases. Alguns exemplos são a base dez, que são agrupamentos por dezenas (ou “feixes” de dez unidades). Base cinco, agrupamento por feixes de cinco. Base vintesimal, agrupar por vintenas e potencias de 20 (baseado nos vinte dedos, mão e pé). Base sexagesimal (baseado no número de 1 a 60).

A forma atual dos numerais foi desenvolvida pelos Hindus no século X, de maneira distinta dos numerais adotados na Europa e em outras regiões do oriente. A utilização desses algarismos foi levada ao resto do mundo através do comércio e do colonialismo europeu. Foi atribuído ao matemático italiano Leonardo Fibonacci (1175-1250), que teve contato com esses números no Norte da África, que concluiu que o sistema de numeração indo-arábico era o melhor sistema pra ser adotado nas notações e nos cálculos aritméticos. Para ensiná-lo aos Europeus, Leonardo escreveu o livro *Liber Abbaci*, que é umas das obras mais importantes na história da matemática (Garbi, 2010, p. 148). Esta frase inicial do livro é um marco histórico: *“Estes são os noves símbolos hindus 9,8,7,6,5,4,3,2,1. Com estes nove símbolos e com o sinal 0, que os árabes chamam de zéfiro, qualquer número pode ser escrito*” (apud Garbi, 2010). O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos indianos (hindus) que o inventaram, e aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental.

Pode-se concluir que o sistema indo-arábico é resultado de uma simplificação na escrita em um momento de necessidade de dialogo numérico entre civilizações diferentes. Esse sistema é e será usado por tempo indeterminado como forma de unificação numérica, sendo o sistema numérico mais utilizado do mundo e o de mais fácil entendimento.

História dos números reais: números racionais

A história conta que o imperador Sesostris dividiu as terras as margens do Nilo entre os cidadãos, que as utilizavam geralmente para a agricultura. Cada pessoa deveria repassar ao imperador uma quantia em impostos equivalente ao tamanho da terra recebida. No entanto, no período das cheias do Rio Nilo, muitas dessas terras acabavam por ser inundadas, de forma que seus donos se sentiam lesados e recorriam à Sesostris exigindo uma nova demarcação para recalcular o valor a ser pago.

Cabia aos agrimensores à tarefa de medir o terreno e avaliar a redução sofrida por ele. Para isto eles utilizavam cordas que possuíam um nó a cada um cúbito (medida do Faraó que correspondia à medida do cotovelo ao dedo médio do Faraó) e comparavam o seu comprimento com o do terreno, aferindo quantos cúbitos cabiam no espaço a ser demarcado, por consequência essa medida era expressa em cúbitos. Foi então que começaram a surgir alguns obstáculos que dificultavam a realização dessas medições, a partir do momento em que se houve a percepção de que quase sempre o número de vezes que o cúbito cabia no comprimento a ser medido não era inteiro, pois acabava sobrando um “pedaço” cujo tamanho era menor que a unidade utilizada. Assim, foi preciso o desenvolvimento de uma nova grandeza numérica que fosse capaz de expressar o que eram esses “pedaços”. Neste contexto, a fração tem sua origem a partir da necessidade de representar grandezas de medidas não inteiras, ou seja, números que indicassem partes menores que uma unidade.

Os gregos, descobriram os racionais como aqueles que podem ser representados como razões entre inteiros, todas as suas ideias eram fundamentadas em uma lógica de raciocínio e baseadas na tentativa de formar definições dos termos empregados. Por exemplo, os pitagóricos dedicaram muito tempo ao estudo da música e descobriram as relações matemáticas das notas musicais com o comprimento das cordas que emitiam determinado som.

Por meio da história do desenvolvimento das frações é possível notar que, para chegar aos conhecimentos atuais, foi necessária a conexão das noções tidas por diversas civilizações, cujos usos explicitam os contextos em que o conceito de fração está inserido. Tem-se que principalmente as concepções de frações no Egito, de decimais na Mesopotâmia e as demonstrações teóricas na Grécia, se completam, sendo fundamentais para a construção da ideia que se tem hoje, pois, apesar de utilizarem representações diferentes trabalhavam com o mesmo conceito.

Medir e contar são operação que a vida diária nos exige com frequência (Caraça, 2005, p. 29). O problema da contagem foi resolvido pelo homem com os números naturais. Porém, com o tempo, perguntas do tipo: “quantas vezes uma grandeza cabe em outra”, tornaram os números naturais insuficientes. Deste modo, os números racionais vieram como resposta. O conceito dos números racionais traz grandezas e medidas. Mas o que seria medir? Medir é a comparação de duas grandezas de mesma espécie. E o que é grandeza? Relaciona-se com a quantidade em que uma determinada qualidade é comum aos elementos da natureza. O conceito de medida surge do problema de não saber dividir a terra igualitariamente. Para medir são necessários: a escolha da unidade, comparação dessa unidade e expressão dessa comparação por um número.

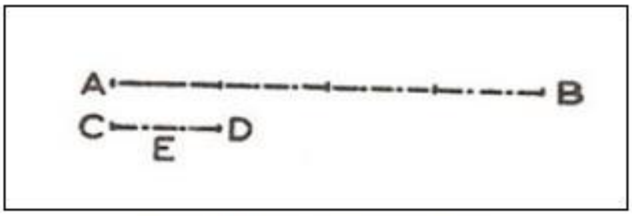

Figura 1: Caraça (2005, p.32)

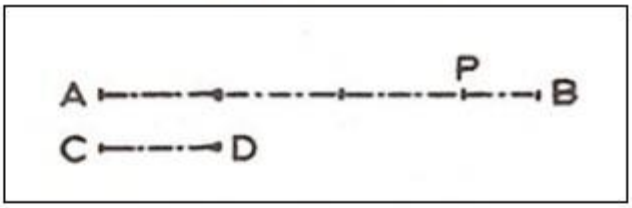

Figura 2: Caraça (2005, p.33)

Na figura 1, quantas vezes CD cabe em AB? A resposta prontamente seria quatro vezes. Mas na figura 2, quantas vezes CD cabe em AB? A resposta seria 3 vezes e sobraria um pedacinho. Mas como expressar esse pedacinho?

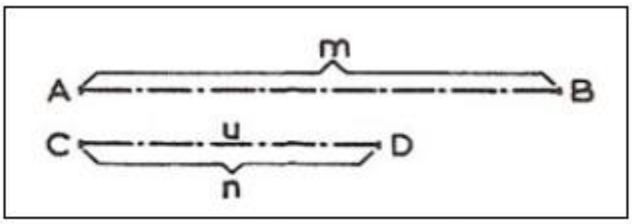

Figura 3: Caraça (2005, p.35)

Por Caraça (2005, p.35) a razão dada por $\frac{m}{n}$ no caso da figura 1 existe é quatro. Já na figura 2, seria impossível nos números naturais. Mas, é na negação dessa impossibilidade que se abre e constrói o novo número: o número fracionário. Para a criação deste novo campo numérico foram utilizados: o princípio da extensão (números criados pela comparação) e a análise da questão (onde está a dificuldade na divisão).

Porém, apesar de sua importância, considerando sua aplicação, os estudos revelam que durante muito tempo as notações apresentadas eram mal fixadas e inadaptadas a prática. Além disso, acreditou-se por um longo período que elas expressavam apenas relações entre inteiros, de forma que só foram aceitas como sendo verdadeiramente um número a partir do desenvolvimento do cálculo e da aritmética, quando comprovou-se que elas obedecem às mesmas regras que os números inteiros.

A crise dos incomensuráveis: os números irracionais

Para os Pitagóricos, todas as grandezas podiam ser expressas por números inteiros ou pela razão entre dois números inteiros. Neste caso dizemos que as grandezas são comensuráveis, isto é, Dados dois segmentos AB e CD, existe um segmento u e dois inteiros *m* e *n* tais que *AB=um* e *CD=nu*. Portanto a razão entre os segmentos *AB* e *CD* é dado por $\frac{m}{n}$.

Pela ironia do destino, o próprio Teorema de Pitágoras foi uma das hipóteses prováveis da descoberta da existência de números incomensuráveis, isto é, que não podem ser expressas por razão entre dois inteiros. No quadrado de lado 1, a diagonal *d* deste quadrado é calculada usando o teorema de Pitágoras e é dada por $\sqrt{2}$, onde esse resultado não pode ser expresso entre a razão entre dois inteiros. Esse resultado pode ser provado por contradição ou absurdo e se encontra em Caraça (2005, p. 50). Surgiu então um novo número, que seria denominado posteriormente de números irracionais. Eudoxio de Cnidos, que foi discípulo de Platão, foi o primeiro a resolver o problema das grandezas incomensuráveis construindo a teoria das proporções, que se encontra no livro V dos Elementos de Euclides.

O conjunto dos números reais

Para conceituar o conjunto dos números reais, será baseado no livro Conceitos fundamentais da Matemática de Bento De Jesus Caraça. Vamos denotar por *P* o conjunto dos pontos de uma reta e *Q* o conjunto dos números racionais. Todo número racional corresponde a um ponto da reta. Existe uma correspondência de *Q* em *P* que é completa e unívoca, mas nem todo ponto da reta é um número racional. A correspondência P em Q não é completa, isto é, não há correspondência biunívoca entre *P* e *Q*.

A questão a ser investigada, o que nega a correspondência biunívoca entre *P* e *Q.* Vamos investigar as características do conjunto da reta *P* e relaciona-las com o conjunto dos números racionais *Q.* O conjunto *P* e *Q* são infinitos, isto é, possuem uma infinidade de elementos. Eles são ordenados, existe uma relação de ordem entre os pontos de uma reta e entre os números racionais. *P* e *Q* são densos, isto é, entre dois elementos de um conjunto existem uma infinidade de elementos do mesmo conjunto.

Galileu e Leibniz julgava que a continuidade de pontos de uma reta era consequência da densidade. Mas os racionais são densos e não formam o continuum. Se representamos todos os racionais numa reta, não teremos preenchido totalmente os pontos, restarão inúmeros buracos, que posteriormente seriam preenchidas pelos números irracionais. O problema da correspondência biunívoca está no fato do conjunto dos números racionais não serem contínuos. Este fato implica que entre dois números racionais existem inúmeros números racionais e não-racionais, indicando que o conjunto dos números não-racionais é mais abundantes do que suponham os Gregos.

Para o preenchimento dos buracos, Dedekind (1931-1916) fez uma definição de números reais conhecidos como corte de Dedekind que será enunciado a grosso modo como:

> Cortando uma reta em duas partes podemos partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da classe B. dessa forma cada corte define um e um só número real. Se A tem o maior elemento ou se B tem o menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem maior elemento ou B não tem menor elemento, então o corte define um número irracional (Bongiovanni, 2005, p.99).

O conjunto dos números reais então é definido como a união dos conjuntos dos números racionais com os números irracionais. Para definir um número racional, basta dois números naturais. Para definir um número real são necessárias duas infinidades de números racionais (corte). O interessante é que o corte de Dedekind foi inspirando na teoria das proporções de Eudoxio de Cnidos enunciado na Grécia Antiga para resolver o problema dos números incomensuráveis.

O ensino dos números reais na Educação Básica e uma proposta de trabalho

Após essa excursão histórica de 25 séculos descrita acima, como definir esses números na Educação básica? Primeiramente vamos analisar o que diz Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) sobre o ensino dos números irracionais propõem na Educação Básica.

> "Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente" (PCNs, 1998).

Os PCNs sugerem ainda que deve-se trabalhar com os números irracionais como pontos da reta real, fazendo com que o aluno compreenda a necessidade do irracional na construção do conjunto dos números reais. Na maioria das vezes o número irracional é trabalhado com dois conceitos que são: Os números irracionais são números que não podem ser expressos na razão entre dois inteiros e os irracionais são números decimais infinitos não-periódicas.

Esses conceitos não levam em conta o desenvolvimento da estrutura dos irracionais, levando o aluno a entender que estes números existem só na abstração, são números invisíveis. Mas na verdade esses números aparecem em muitas situações problemas, como o número π. Outras vezes o irracional é relacionado com as raízes não-exatas, limitando o seu estudo no cálculo com radicais, não contribuindo em nada com a compreensão do seu conceito.

Além disso, com o desenvolvimento de outras áreas da matemática, encontramos situações onde aparecem os números irracionais, diferente das definições dadas anteriormente. Podemos dizer que os números irracionais podem ser classificados como: as raízes não exatas; são combinação finitas de operações racionais e radiciação sobre inteiros; são raízes de equações algébricas gerais de grau superior a 4, que não pertencem a categorias acimas e são números transcendentes como o Pi e *e* (número de Euler) onde tais números podem ser escritos como aproximação de limites de series numéricas.

O problema investigativo proposto é: como trabalhar os números reais, principalmente os números irracionais, que utilizam conceitos de uma Matemática abstrata que só é ensinado nos últimos períodos de um curso de Licenciatura em Matemática?

Diante do exposto acima, a teoria de Davydov, baseado na teoria histórico cultural de Vygotsky, tendo como foco o ensino e a aprendizagem poderão contribuir para indicar possibilidades didáticas para o ensino de números reais, demonstrando que não se trata de mera aplicação de uma teoria pedagógica e que não existe didática fora dos conhecimentos específicos.

Por esse motivo, a atividade de estudo proposta vai na direção da abstração para o concreto, das características gerais da reta para o estudo particular do conceito de número, pretendendo uma abordagem do conceito de número real relacionando-o com as principais características do conjunto dos pontos de uma reta, que são: a dualidade discreta/contínua, noção de infinidade, densidade entre dois pontos, relação de ordem e continuidade dos pontos da reta. Após estudar essas características da reta, será feito uma correspondência com o conjunto numérico real, mostrando a infinidade, a densidade (que entre dois números racionais existem infinitos números racionais), a ordenação dos reais e a continuidade (mostrando que todo ponto da reta corresponde a um número real). Assim, pretende-se com essa relação, que o aluno entenda a essência do conceito de número real.

Na teoria desenvolvimental de Davydov o foco da aprendizagem não é o resultado descritivo do conteúdo em si, mas o processo pelo qual se obtém o resultado. Por esse motivo a atividade de estudo tem por objetivo dos alunos se apropriarem das ações mentais conexas aos conceitos teóricos. Para Freitas

(2012, p. 402) na atividade de estudo deve ter uma conexão entre o percurso investigativo cientifico e o percurso de estudo do objeto pelo aluno.

> Em síntese, a exposição do conhecimento resultante da investigação cientifica se realiza por um movimento de pensamento que parte da análise do objeto mediado pela abstração para explica-lo em sua forma concreta e real". (Freitas.2012. P.402).

Para Freitas (2016) a teoria desenvolvimental atribui a escola a finalidade dos alunos de apropriarem a cultura produzida e acumulada social e historicamente, oferecendo conceitos e novas funções psíquicas superiores, desenvolvendo assim, sua consciência. Para Davydov o aluno se desenvolve através da atividade de estudo. Toda atividade de estudo desenvolvida pelo professor deve ter como objetivo a assimilação dos conceitos científicos.

Conclusão

O presente artigo pretendeu analisar como o conceito dos números reais se desenvolveu historicamente, partindo das necessidades dos homens e na medida em que o homem aprendeu a transformar a natureza, faz-se crescer a sua inteligência, o homem coloca a natureza exterior através das suas transformações ao serviço dos seus fins. Com o tempo o estudo dos números se transformou de uma ciência empírica ou experimental a uma ciência dedutiva e abstrata, que foi evoluindo de maneira gradual até chegar ao conceito formal de número real. A relação dialética entre vida ativa e pensamento abstrato, é o motor do desenvolvimento dos números e consequentemente da Matemática.

O olhar da teoria lógico-histórico da formação do conceito de números reais aqui apresentada trabalha para que os professores compreendam como determinados conteúdos foram desenvolvidos ao longo do tempo e ao juntar este conhecimento com o desenvolvimento lógico, atual, deste mesmo conteúdo possa criar propostas de ensino que trabalhem situações desencadeadoras de aprendizagem que utilizem, implicitamente, a Epistemologia e a História da ciência ensinada.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3º ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BONGIOVANNI, V. *As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnidos "a teoria das proporções e o método da exaustão*". Revista UNIÓN. Junho de 1995. Página 91-110

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental* – Brasília: MEC/SEF, 1998a.

CAMPOS, Dinah M.de S., *Psicologia e desenvolvimento humano*. 5° ed. Petrópoles: Vozes, 2008.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais Da Matemática*. Lisboa. 2005.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história – vol.1*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.

DAVYDOV, V. V. *Problemas do ensino desenvolvimental - a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia*. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas, 1988.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

IFRAH, G. *Números: a história de uma grande invenção.* 11 ed. São Paulo: Globo, 2005.

GARBI, G. G. *A Rainha das ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5º ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KARLSON, P. A magia dos números: a matemática ao alcance de todos. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

LIBÂNEO, José. C.; FREITAS, Raquel, A. M.M. Vygotsky, Leontiev, Davídov: *contribuições da teoria histórico-cultural para a didática*. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (orgs.) Didática e interfaces. Rio de Janeiro/Goiânia: Descubra, 2007.

____________. *Ensinar e aprender, aprender e ensinar: o lugar da teoria e da prática em didática*. In: Libâneo, José C.; Alves, Nilda. (Org.). Temas de pedagogia: diálogo entre currículo e didática. 1ed.São Paulo: Cortez, 2012, v. 1, p. 35-60. _____________. *A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino*. Educativa, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

REZENDE, W.M., *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo: USP, 2003.

SANTOS, J. C. *Números reais: um desafio na Educação Básica*. Monografia de Especialização. Universidade Federal Fluminense. 2007.

VYGOTSKY, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Trad. Paulo Bezerra. – São Paulo: Martins Fontes, 2000.

___________. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 6ª Ed. São Paulo: Livraria Martins Fontes Editora Ltda (1998).