INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA NO INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS: EXPERIMENTOS, CONJECTURAS E DESAFIOS

Maxwell Gonçalves Araújo[1]

Uender Barbosa de Souza[2]

Resumo

Experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar são os quatro pilares da Investigação Matemática, podendo ser desenvolvida, em particular, com o apoio do software GeoGebra. Desde que começou a ser introduzida no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Campus Goiânia (IFG/Goiânia), nas disciplinas de formação de professores, esta teoria tem despertado conjecturas nas diversas subáreas matemáticas: Determinantes, Lugares Geométricos, Funções Inversas, Operações e Raízes de Números Complexos, Soma de Vetores e Polígonos. Este trabalho propõe uma rápida exposição de alguns destes tópicos, como foram trabalhados em sala de aula e como o software ajudou no aprendizado significativo destes conteúdos. Nossa base teórica será o ensino desenvolvimental de Davydov que nasce do Materialismo Histórico Dialético, cujas premissas geraram uma perspectiva particular onde se desenvolveram suas bases: a aprendizagem se dá, inicialmente, do interpessoal para o intrapessoal; o papel da escola é ensinar conceitos científicos; a atividade precede a aprendizagem; a história do objeto deve ser compreendida; o caminho da boa aprendizagem é do abstrato para o concreto; o processo descritivo não contempla a aprendizagem significativa; a atividade deve atingir a essência do objeto; o método decorre do conteúdo; a motivação é importante para o ensino-aprendizagem dos conceitos científicos; conhecendo seu aluno sócio-cognitivamente, o professor associa ciência e cultura.

Palavras Chave: Investigação, Matemática, GeoGebra, Ensino Desenvolvimental.

Research mathematics with geogebra in the federal institute of education, science and technology of goiás: experiments, conjecture and challenges

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Goiás. Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. mxnte@yahoo.com.br.

[2] Mestre em Matemática Pela Universidade Federal de Goiás; Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; Coordenador e membro fundador do Instituto GeoGebra de Goiás. uenderbs@gmail.com

Abstract - Experiment, conjecture, formalize and generalize are the four pillars of research Mathematics can be developed, in particular, with the support of the software GeoGebra. Since it began to be introduced in the Federal Institute of education, science and technology of Goiás, Goiânia Campus (IFG/Goiânia), teacher training in the disciplines, this theory has sparked conjecture in various subareas mathematics: Determinants, places Geometric inverse functions, operations and roots of complex numbers, addition of Vectors, and polygons. This paper proposes a quick display of some of these topics, as were worked in the classroom and how the software has helped in significant learning of these contents. Our theoretical basis is the development of the education of the Davydov, born of historical materialism dialectic, whose premises have generated a particular perspective where they developed their foundations: learning takes place, initially, of the intrapersonal for the interpersonal; the role of the school is to teach scientific concepts; the activity precedes learning; the history of the object must be understood; the path of good learning is the abstract for the concrete; the descriptive process does not provide meaningful learning; the activity must reach the essence of the object; the method stems from the content; motivation is important for the teaching and learning of scientific concepts; knowing your student partner-cognitively, the teacher combines science and culture.
Key Words: Research, Mathematics, GeoGebra, Developmental Education.

1. Introdução - o ensino Desenvolvimental de Davydov

Esta teoria foi discutida com os alunos, com o objetivo de que os mesmos entendessem o que queríamos propor, possibilitando a inserção da teoria no seu próprio trabalho. Nossos estudos iniciais foram motivadores, mostrando o potencial da proposta, aqui apresentada em uma de suas possibilidades, tendo como referenciais pressupostos da Teoria de Davydov a saber:

1.1. A aprendizagem se dá, inicialmente, do interpessoal para o intrapessoal

A criança nasce num mundo desenvolvido sob todos os aspectos. Busca inicialmente se apropriar dos valores culturais transmitidos pela família, pela sua vida social, pelas linguagens falada, escrita e simbólica, todas elas com alto grau de complexidade. Estabelece suas relações e seu conhecimento empírico vai se consolidando, com base nessas relações. A atividade mental é mediatizada pela linguagem nessa interação social com os objetos ali constituídos, os quais estão carregados de historicidade e são interiorizados, isto é, a criança se apropria dos êxitos do desenvolvimento histórico e dos objetos criados pelo homem para dominar seu ambiente. Isso se dá,

inicialmente, através da comunicação, depois pela atividade mental, às vezes reprodutiva e às vezes criadora, num processo sem fim (FREITAS e LIMONTA, 2012, p.8).

1.2. O papel da escola é ensinar conceitos científicos

Segundo Libâneo, apud Freitas e Limonta (2012, p. 7), Davydov em seu ensino desenvolvimental, defende a escola e o ensino dos conhecimentos científicos, éticos, estéticos e técnicos como os principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico e sociocultural desde a infância.

1.3. A atividade precede a aprendizagem

Como a finalidade da escola é ensinar conceitos científicos, então o trabalho do professor e a atividade proposta por ele tem importância fundamental. Para Davydov, a atividade é essencial para que o aluno compreenda os conceitos científicos e precede seu desenvolvimento mental, coadunando-se com Vygotsky, afirmando que a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento e não é, nesta perspectiva, a sua simples assimilação e reprodução, como é costume na nossa educação, mas deve emergir da relação do sujeito com o objeto a partir de uma situação proposta pelo professor com esta finalidade. Assim, ele deve organizar o ensino levando em consideração as ações mentais que serão realizadas pelos alunos (PERES e FREITAS, 2013, p.8). Um conceito científico proposto levará em consideração sua historicidade de modo que o aluno entenda sua utilidade na vida repensando o cotidiano cientificamente, transformando seu conhecimento empírico em científico.

1.4. A História do objeto deve ser compreendida

O planejamento do ensino, nessa perspectiva, solicita ao professor que conheça a origem histórica e o desenvolvimento dos conteúdos, tanto na lógica própria do campo científico quanto em suas relações com outras ciências e com a cultura geral. Essas relações, verificadas pelo professor, serão comunicadas às crianças junto com o conteúdo, e isso tem como objetivo que elas aprendam a estabelecer suas próprias relações e a operar criativamente o

conceito, tornando-o uma ferramenta de pensamento própria (PERES e FREITAS, 2013, p. 13).

1.5. O caminho da boa aprendizagem é do abstrato para o concreto

Para entender essa premissa, notamos que o conhecimento científico abordado no ensino é abstrato, produto final de um pensamento histórico e coletivo. O professor bem preparado planeja uma atividade com a finalidade de ensiná-lo e, para tanto, deve torná-lo concreto para que, em seguida, o aluno consiga visualizá-lo de forma abstrata, como está constituído. Torná-lo concreto significa que a atividade proposta deve ter a dimensão de percebê-lo em uma situação que permita compreendê-lo, retornando para o status de abstrato.

1.6. O processo descritivo não contempla totalmente a aprendizagem significativa

Para exemplificar, vamos lembrar como “aprendemos” o conceito de função. Geralmente, o professor apresenta esse conceito de forma descritiva. Mas isso para Davydov é insuficiente. É necessário que a atividade ative e estimule a capacidade de pensar, sendo capaz de, a partir de uma situação planejada, permitir que o aluno entenda o seu porquê. No caso, o aluno deve compreender essencialmente porque o matemático define função daquela forma. Portanto, a história do conceito ajudará a explicá-lo e a atividade proposta deve ser planejada incluindo esse pressuposto além de permitir ao aluno apropriá-lo.

1.7. A atividade deve atingir a essência do objeto

Ao planejar uma atividade, o professor deve buscar o princípio geral do objeto, com a finalidade de que o aluno compreenda esse princípio, inicialmente aplicando-o a situações particulares. Esta deve permitir ao mesmo acessar o núcleo do objeto. Isso é algo plausível e importante para o ensino da matemática, pois os objetos matemáticos possuem núcleos e essências bem definidas e também uma história, sendo um trabalho possível no contexto escolar.

1.8. O método decorre do conteúdo

Segundo Davydov, apud Peres e Freitas (2013, p. 10), um princípio básico do ensino desenvolvimental é que os métodos de ensino decorram do conteúdo, ou ainda, dos conceitos que compõem os conteúdos escolares. Portanto, a atividade de aprendizagem é a organização e proposição, pelo professor, de um conjunto de tarefas que poderão levar o aluno a formar em sua mente diversos conceitos que, inter-relacionados, compõem um dos conteúdos de uma determinada área do conhecimento a ser aprendido. Assim, uma metodologia pode ser adequada para trabalhar propriedades de funções e geometria euclidiana, por exemplo, mas pode ser ineficiente para o ensino de análise combinatória, sendo necessária outra para este fim.

1.9. A importância da motivação para o ensino-aprendizagem dos conceitos científicos

Para esta concepção é importante a questão da motivação para que se alcance a aprendizagem efetiva. Assim, a atividade proposta deve se constituir como motivadora para que o aluno deseje aprender. É necessário que o professor trabalhe a questão da emoção em suas atividades, de modo a despertar no seu aluno esse desejo. Um passo nesta direção é conceber que, em aula, lidamos com sujeitos potenciais e inteligentes. Então devemos valorizar a existência do outro, levando a proposta a todos os partícipes ali presentes, considerando a coletividade.

1.10. Conhecendo seu aluno sócio-cognitivamente, o professor associa ciência e cultura

O professor, ao considerar as características psicológicas, culturais e sociais de seus alunos, proporá atividades integradoras de modo a levar em consideração a transformação do pensamento empírico de seu aluno em pensamento científico. A atividade deve ser o elo entre esses dois mundos.

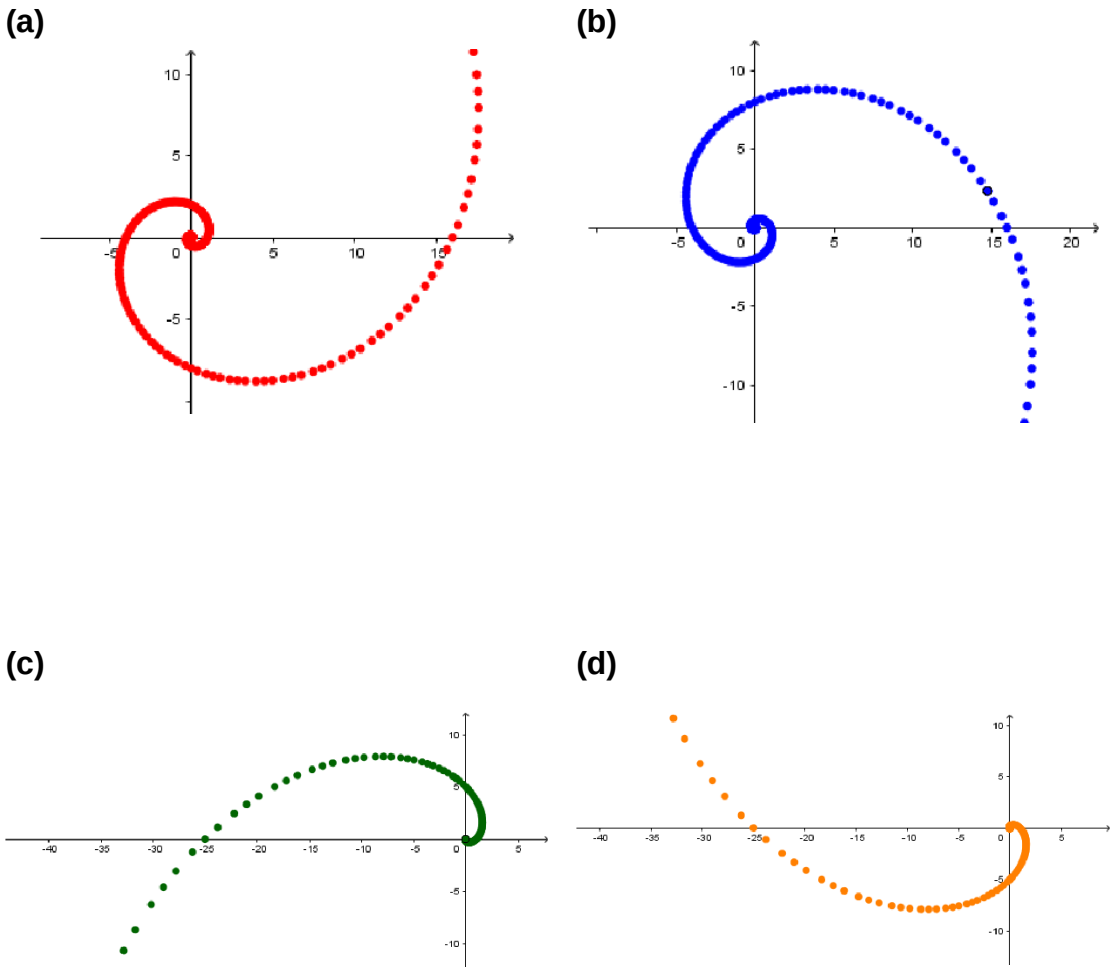
2. A Investigação Matemática com o GeoGebra

Na prática, solicita-se algo aos alunos e, ao se considerar alguns exemplos ilustrativos do fato proposto (experimentar), começavam a presumir a respeito daquela situação particular (conjecturar). A conjectura era, então,

investigada (formalizar) e, se o padrão encontrado continuava a surgir como resposta, definia-se como próximo passo a tentativa de demonstrar que o padrão era realmente valido para todas aquelas situações particulares (generalizar). A seguir, relataremos alguns momentos em que a investigação orientada pelo ensino desenvolvimental ocorreu em sala de aula.

2.1. Investigação Número 01: Qual é o lugar geométrico no Plano Argand-Gauss que representam as potências de um complexo "z" Imaginário Puro?

Figura 1: (a) $z = (2i)^n$; (b) $z = (-2i)^n$; (c) $z = \left(-\frac{1}{5}i\right)^n$; (d) $z = \left(\frac{1}{5}i\right)^n$; com – 5 ≤ n ≤ 5.

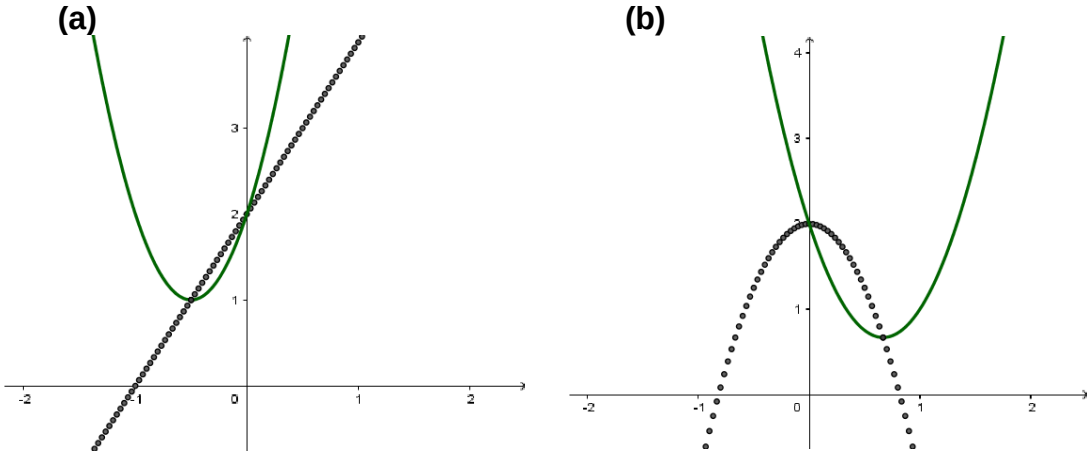


Fonte: Os autores.

Ao verificarmos as situações onde o coeficiente de “i” é inteiro ou racional, observamos que o gráfico é uma espiral centrada na origem, modificando, apenas, seu aspecto inicial.

2.2. Investigação Número 02: Qual é o lugar geométrico dos vértices de uma parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando variamos “a” e “b”, separadamente? Nota: variando-se “c” e mantendo-se “a” e “b” constantes, logicamente, por indução, teremos sempre uma reta paralela ao eixo dos y.

Figura 2: (a) $f(x) = ax^2 + 4x + 2, a \in \mathbb{R}^*$; (b) $f(x) = 3x^2 + bx + 2, b \in \mathbb{R}$.



Fonte: Os autores.

Ao investigarmos as situações propostas (variação dos coeficientes “a” e “b”, separadamente), observamos que o lugar geométrico na primeira situação (variação de a) é uma reta e na segunda situação (variação de b) é uma parábola.

2.3. Investigação Número 03: Esta investigação é proposta por Vaz e Jesus (2013), onde conjecturam: qual é o valor do determinante de uma matriz qualquer, cujos termos são consecutivos, ordenados em linhas ou colunas?

a) Matriz 2x2 – Demonstração:

$$\begin{vmatrix} n & n+1 \\ n+2 & n+3 \end{vmatrix} = n.(n+3) - (n+2).(n+1) = -2.$$

b) Matriz 3 x 3 – Demonstração:

$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$ → Teorema de Jacobi: Multiplicando todos os elementos de uma linha ou de uma coluna pelo mesmo número e adicionando os resultados aos elementos correspondentes de outra linha ou coluna, formamos a matriz B, onde ocorre a seguinte igualdade: $det(A) = det(B)$. Assim, fazendo: $Linha_2 - 1. Linha_1$ e $Linha_3 - 1. Linha_1$, teremos:

$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$ → Se verificarmos em uma matriz duas linhas ou duas colunas com elementos proporcionais, o determinante terá valor igual à zero. Logo, das linhas 2 e 3 temos que o determinante e igual a zero.

c) Matriz c x c – Demonstração:

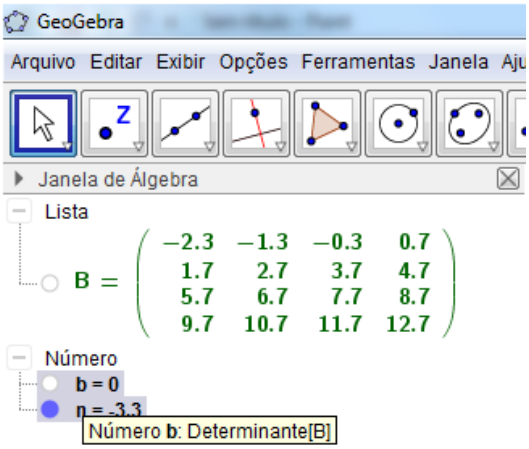
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n+1} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{n+(c-1)} \\ \boldsymbol{n+c} & \boldsymbol{n+c+1} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{n+2c-1} \\ \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} \\ \boldsymbol{n+(c-1)c} & \boldsymbol{n+(c-1)c+1} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{n+c^2-1} \end{vmatrix}$$

Aplicando as mesmas propriedades anteriores, teremos:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{n+1} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{n+(c-1)} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{\dots} \\ \boldsymbol{(c-1)c} & \boldsymbol{(c-1)c} & \boldsymbol{\dots} & \boldsymbol{(c-1)c} \end{vmatrix}$$

Portanto, este determinante também é zero. Assim, concluímos que: se temos uma matriz com os termos consecutivos em linhas ou colunas: se for uma matriz de ordem 2, então, o determinante será -2; para as matrizes quadradas de ordem c com $c > 2$, então, o determinante será igual a 0.

Figura 3: Determinante de uma matriz de ordem 4 com termos consecutivos.



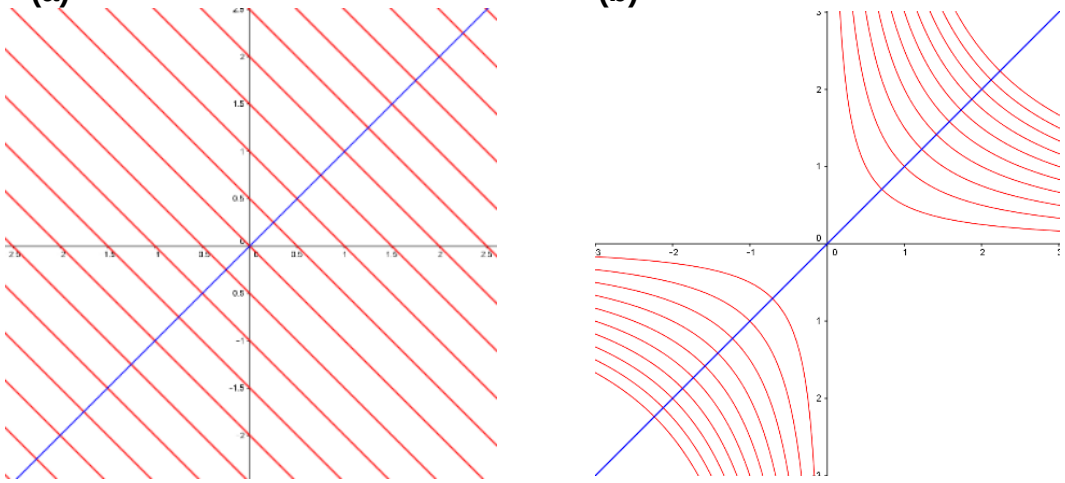
Fonte: Os autores.

2.4. Investigação Número 04: Esta investigação é proposta por Vaz e Vasquez (2015), onde pedem para determinar funções reais tais que $f(x) = f^{-1}(x)$, ou seja, funções inversas de si mesmas, chamadas de Involuções. Várias de suas propriedades são apresentadas por Wiener e Watkins (2002).

Através do software, algumas funções são descobertas por inspeção (experimentação), como as famílias de funções. Dois exemplos são mostrados na figura a seguir:

Figura 4: (a) $f(x) = -x + k, k \in \mathbb{R}$; (b) $g(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}^*$.

(a) **(b)**



Fonte: Os autores.

Na fase de conjecturar, é proposto que se f real é uma involução, então:

i. f é simétrica em relação à reta $x = y$;

ii. Se o seu gráfico está contido no segundo e no quarto quadrante, então f é uma função ímpar;

iii. Se f não é a função identidade, $x_0 \in I \subset dom(f)$ tal que $f(x_0) = x_0$ e f contínua em I, então f é decrescente em I;

iv. Se f possui as condições do item anterior e é derivável em x_0, então o gráfico de f corta a reta $x = y$ no ponto (x_0, x_0) em ângulo reto.

O passo seguinte é a formalização, já que as conjecturas propõem condições gerais para funções reais.

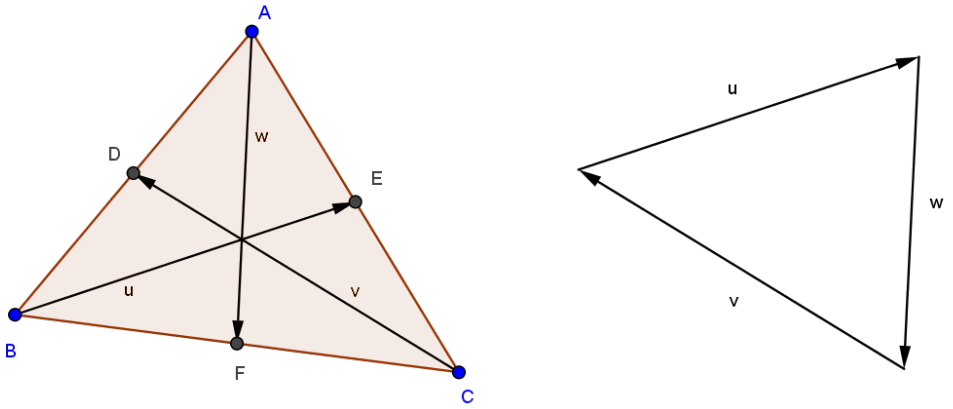
2.5. Investigação Número 05: Investigando uma propriedade dos polígonos.

Esta atividade é posposta por Vaz, Vasconcelos e Freitas Filho (2015, p. 11). Considere um triângulo qualquer, crie três vetores com extremidade inicial em um vértice e final no ponto médio do lado oposto ao vértice, como na figura 4 (a).

Através da experimentação, percebe-se que a soma dos vetores é sempre nula, ou seja, forma um ciclo, como mostra a Figura 4 (b).

Figura 4: (a) Construção dos vetores; (b) Representação geométrica da soma vetorial.

(a) (b)



Fonte: Os autores.

Na fase de conjecturar, é levantada a hipótese de que esta propriedade é válida para qualquer triângulo. A formalização se faz de maneira simples, basta notar que os vetores podem ser escritos na forma $u = BA + \frac{AE}{2}$; $v = CB + \frac{BA}{2}$ e $w = AC + \frac{CB}{2}$. Efetuando a soma, obtemos o valor nulo.

Por último, os autores generalizam a propriedade para polígonos quaisquer de n lados e apresentam uma demonstração com uma simbologia apropriada para facilitar as representações. Como resultado mostram que, para um polígono de n lados, obtemos $n-2$ conjuntos de vetores aos quais as somas são nulas.

3. Conclusão

Após o levantamento dos trabalhos realizados no IFG/Goiânia, envolvendo Investigação Matemática com o GeoGebra, verificamos que a utilização do software como ferramenta mediadora do conhecimento matemático e a articulação com a fundamentação teórica do ensino desenvolvimental, inicia um processo de ensino e aprendizagem efetivo, onde os envolvidos se fizeram co-partícipes da construção do conhecimento matemático, aliados aos quatro passos da sequência didática proposta por Vaz (2012). Todos os propositores das atividades abordadas concluíram que o software auxiliou os alunos a fazerem conjecturas, formalizar os conceitos, além da motivação que demonstraram nas situações-problema propostas. Com esse artigo, buscamos reunir e apresentar algumas pesquisas realizadas no IFG que utilizaram o software GeoGebra como base, no período de 2010 à 2016. Os resultados e as conclusões deixam claro que, com o auxílio do software, as fases de experimentação, conjecturação, formalização e generalização ficam mais evidentes e fluem, a cada fase, com mais naturalidade e menos complexidade, diferentemente se o conteúdo fosse explorado como tradicionalmente se costuma fazer (teoria, exemplos, exercícios).

Concluímos nosso trabalho enfatizando o potencial da proposta, observando, através dos relatos e pela observação das reações dos alunos, que esta metodologia agregou, até o momento, elementos substanciais na formação destes e mostrou-se colaboradora no trabalho motivador e inovador com relação ao ensino de matemática. Constatamos a necessidade de continuar o trabalho e ampliar nossos objetivos dentro e fora deste projeto. Nesta direção, já foi proposto a realização de pesquisas de conclusão de curso constituídas a partir desta experiência. Sentimos a necessidade de construir um laboratório de ensino de matemática, buscando inserir o ensino

desenvolvimental como base na escolha das atividades, na confecção do material manipulável, na seleção de vídeos, entre outros. Notamos certa urgência em trabalhar na graduação, de forma mais eficaz, esta teoria de Davydov, com o objetivo de preparar melhor nosso futuro professor, pois ficou nítido que nosso aluno ainda é carente de uma formação adequada, mesmo que no interior do curso estejam sendo trabalhadas disciplinas nessa direção. Percebemos que não é atingida a essência dos objetos estudados nestas disciplinas (um dos pressupostos do ensino desenvolvimental), algo que esta teoria pode, com dedicação e trabalho, nos ajudar a alcançar.

4. Referências

FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira; LIMONTA, Sandra Valéria. **A educação científica da criança**: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental. Revista Linhas Críticas, Brasília, v.18, n. 35, p. 69-86, 2012.

PERES, Thalitta Fernandes de Carvalho; FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira. **Matemática no ensino médio**: ensino para a formação de conceitos e desenvolvimento dos alunos. Práxis Educativa (Impresso), v. 8, p. 173-196, 2013.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando:** articulando investigação matemática com o geogebra. Educativa (Goiânia. Online), v. 15, p. 39-51, 2012.

_____, Duelci Aparecido de Freitas; JESUS, Elivanete Alves de. **Investigação matemática com o GeoGebra:** um exemplo com matrizes e determinantes. Boletim GEPEM (Online), v. 62, p. 165-170, 2013. Disponível em: http://doi.editoracubo.com.br/10.4322/gepem.2014.030. Acesso em: 28 ago. 2017.

_____, Duelci Aparecido de Freitas; VASCONCELOS, José Eder Salvador de; FREITAS FILHO, Osni Oliveira de. **Investigação matemática com o GeoGebra em uma propriedade dos polígonos**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, 2015. n. 1, v. 3. ISSN 2319-023X. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v003-n001-vaz-vasconcelos-e-freitas-filho.pdf. Acesso em: 28 ago. 2017.

_____, Duelci Aparecido de Freitas; VASQUEZ, Julio Cezar Saavedra. **Utilizando a investigação matemática com o GeoGebra para caracterizar funções de uma variável real que são inversas de si mesmas**. Revista educativa. Goiânia: Gráfica PUC GOIÁS, 2015. v. 17, n. 2, p. 656-668. Disponível em: http://tede2.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/article/viewFile/4566/2604. Acesso em: 28 ago. 2017.

WIENER, Joseph; WATKINS, Will. **A Glimpse into the Wonderland of Involutions**. Missouri: J. Math. Sci. 14, 2002, 3, 175-185.